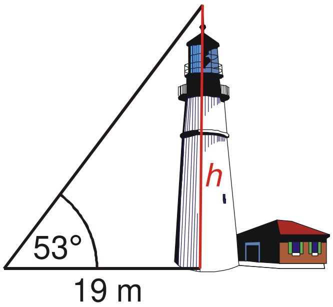
4.3.12 Tangens a kotangens

Předpoklady: 040311

Př. 1: Úhel, pod kterým je možné pozorovat vrchol věže ze vzdálenosti 19 m od její paty, byl změřen na $53°$ od vodorovné roviny. Jak je věž vysoká?



Z obrázku je vidět, že v nakresleném pravoúhlém trojúhelníku známe jednu odvěsnu a potřebujeme najít délku druhé $\Rightarrow$ nemůžeme použít ani funkci $\sin\alpha$ ani funkci $\cos\alpha$ (obě představují poměr vůči přeponě) $\Rightarrow$ potřebujeme zavést další funkci.

Př. 2: Jak by měla být definována funkce potřebná k vypočtení předchozího příkladu?

Potřebujeme funkci, která bude z hodnoty úhlu určovat hodnotu poměru obou odvěsen.

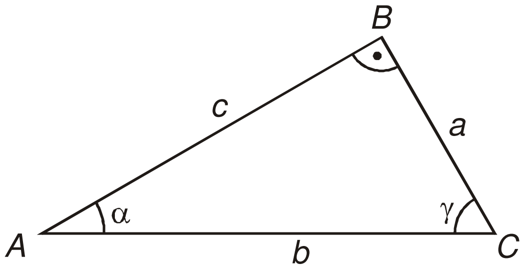
Takové funkce jsou dvě, známější je funkce tangens.

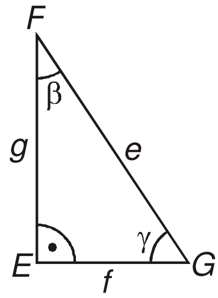
Funkci, která udává poměr protilehlé a přilehlé odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku s vnitřním úhlem α nazýváme tangens. Píšeme $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}}$.

Druhou funkcí, kterou bychom mohli použít, je funkce kotangens, která udává poměr přilehlé a protilehlé odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku s vnitřním úhlem α. Píšeme $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\textit{přilehlá odvěsna}}{\textit{protilehlá odvěsna}}$. Protože funkce kotangens nám nepřináší žádné nové možnosti při řešení reálných problémů, budeme se dále zabývat pouze funkcí tangens.

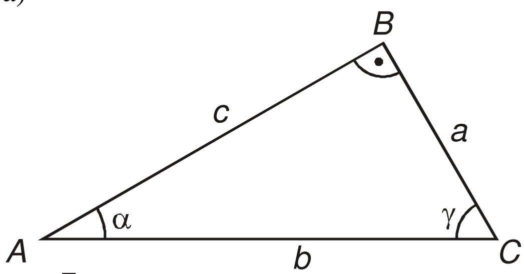
Dodatek: Většina světa nepoužívá pro tangens zkratku $\operatorname{tg}\alpha$, místo ní píše $\tan\alpha$, podobně u kotangens se častěji setkáte s $\cot\alpha$.

Př. 3: Na obrázcích jsou zakresleny trojúhelníky s vyznačenými úhly. Zapiš, čemu se rovnají hodnoty funkce tangens pro vyznačené úhly.

a) 

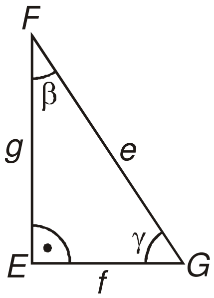
b) 

a)



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}} = \frac{c}{a}$$



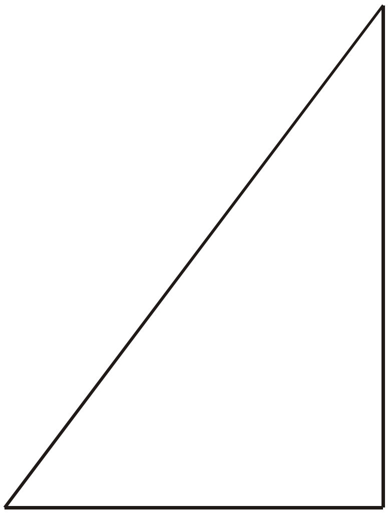
b)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}} = \frac{f}{g}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}} = \frac{g}{f}$$

Př. 4: Narýsuj vhodný trojúhelník, ze kterého bez kalkulačky zjistíš hodnotu $\operatorname{tg}53°$. Získanou hodnotu využij na vypočtení úvodního příkladu.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}}$ $\Rightarrow$ potřebujeme narýsovat trojúhelník, u kterého přilehlá odvěsna k úhlu $53°$ bude mít délku, kterou se snadno dělí (nejlépe tedy 10 cm) $\Rightarrow$ rýsujeme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou 10 cm a přilehlým úhlem $53°$.
Protože takový trojúhelník je poměrně velký, narýsujeme v učebnici trojúhelník o poloviční velikosti (s přilehlou odvěsnou o délce 5 cm).



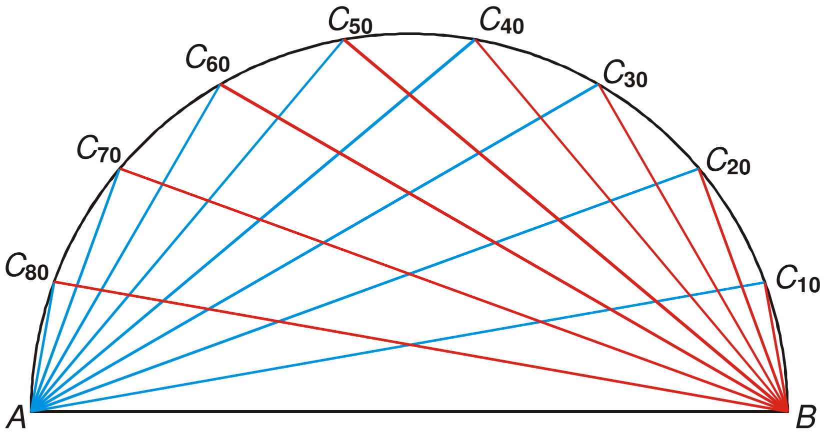
Protilehlá odvěsna má velikost 6,6 cm $\Rightarrow$ $\text{tg}\,53° = \frac{6,6}{5} = 6,6 \cdot 0,2 = 1,32$.

Vypočtení úvodního příkladu: $\text{tg}\,53° = \frac{h}{19} \Rightarrow h = 19 \cdot \text{tg}\,53° = 25,08\ \text{m} \doteq 25\ \text{m}$.

Věž z úvodního příkladu má výšku 25 m.

Př. 5: Doplň v tabulce první dvě řádky hodnotami z předchozích dvou hodin. Najdi způsob, jak využít obrázek s půlkruhem pro určování hodnot funkce $\text{tg}\,\alpha$. Jak souvisí hodnoty funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $\text{tg}\,\alpha$? Doplň poslední řádek tabulky.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin\alpha$										
$\cos\alpha$	1									
$\text{tg}\,\alpha$										



Platí: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přilehlá odvěsna}}$ $\Rightarrow$ pro určení $\text{tg}\,10°$ změříme úsečky BC_{10} (protilehlá odvěsna) a AC_{10} (přilehlá odvěsna) a spočteme podíl $\frac{|BC_{10}|}{|AC_{10}|}$. Ve skutečnosti nemusíme obě úsečky ani měřit, protože jejich délky již máme zapsané v tabulce jako hodnoty funkcí $\sin\alpha$ (úsečka BC_x) a $\cos\alpha$ (úsečka AC_x) $\Rightarrow$ platí $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin\alpha$	0	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1
$\cos\alpha$	1	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,57	nejde

Vztah $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dokážeme pomocí stran v trojúhelníku: $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Př. 6: Urči pomocí kalkulačky s přesností na desetitisíciny.
a) $\mathrm{tg}\,89°$ b) $\mathrm{tg}\,89{,}5°$ c) $\mathrm{tg}\,89°59'$ d) $\mathrm{tg}\,89°59'59'$
Co je na hodnotách zajímavého? Vysvětli.

Při zadávání minut a vteřin buď můžeme využít na kalkulačce tlačítko °'" (jinde je značeno DMS), nebo můžeme převést vteřiny a minuty na stupně).
a) $\mathrm{tg}\,89° = 57{,}2900$ b) $\mathrm{tg}\,89{,}5° = 114{,}5887$

c) $\mathrm{tg}\,89°59' = 3\,437{,}7467$ d) $\mathrm{tg}\,89°59'59' = 206\,264{,}7897$
Hodnoty funkce $\mathrm{tg}\,\alpha$ se pro α blížící se $90°$ velmi rychle zvětšují. Je to jasné ze vzorce $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ - dělíme čísla skoro rovná 1, velmi malými čísly, která se blíží nule $\Rightarrow$ získáváme čím dál větší čísla.

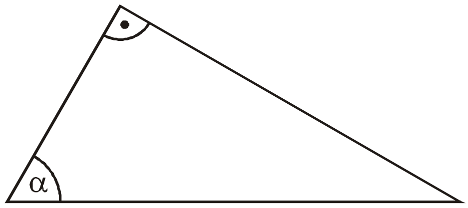
Př. 7: Urči pomocí kalkulačky úhel, pro který platí: a) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}7$, b) $\mathrm{tg}\,\beta = 3{,}2$.

Podobně jako u předchozích goniometrických funkcí využijeme tlačítko $\tan^{-1}$.
a) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}7 \Rightarrow \alpha = 34°59'31''$
b) $\mathrm{tg}\,\beta = 3{,}2 \Rightarrow \beta = 72°38'46''$

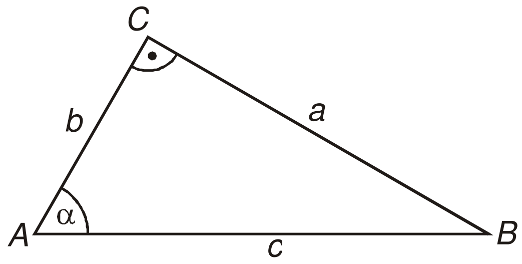
Př. 8: Bez použití kalkulačky zjisti, pro který úhel platí $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$. Ověř pomocí kalkulačky.

$\mathrm{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow$ obě odvěsny musí mít stejnou délku $\Rightarrow$ jde o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník $\Rightarrow$ nepravé úhly jsou shodné $\Rightarrow$ mají velikost $45°$.
Platí $\mathrm{tg}\,45° = 1$.

Př. 9: V načrtnutém trojúhelníku porovnej hodnoty $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ a $\mathrm{tg}\,\alpha$ pro vyznačený úhel α.



V obrázku si označíme vrcholy a strany.



Z obrázku vidíme: $a > b \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c} > \cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Porovnáváme $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ a $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, čitatelé obou zlomků jsou si rovny, odvěsna b je menší než přepona $c \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} > \sin\alpha = \frac{a}{c}$.

U načrtnutého trojúhelníku platí: $\mathrm{tg}\,\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$.

Př. 10: Využij hodnoty funkce tangens získané v předchozích příkladech k nakreslení grafu funkce $y = \mathrm{tg}\,\alpha$, pro x $0 \le \alpha < 90°$.

Shrnutí: Funkce $\mathrm{tg}\,\alpha$ udává poměr protilehlé a přilehlé odvěsny.